Samuel Eilenberg

ROCZNIKI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO
Seria II: WIADOMOŚCI MATEMATYCZNE XXV (1984)

SAUNDERS MACLANE (Chicago)

Samuel Eilenberg i topologia*

Było to 25 kwietnia 1939 r. Świat przeżywał trudne dni. Poprzedni jesieni Chamberlain zawarł w Monachium porozumienie z Hitlerem i sta wało się już jasne, że nie ustanowili tam oni pokoju. W powietrzu czuł się lęk, zauważalny i wśród matematyków. Wobec wzrostu badań ma tematycznych Amerykańskie Towarzystwo Matematyczne, wspart Otto Neugebauerem znającym działalność *Zentralblattu*, zamierzało uru chomić własne czasopismo recenzyjne. Niemcom projekt był nie w sma i wydawnictwo Springer wysłało emisariusza, F. K. Schmidta, dla nego cjacji z Radą Towarzystwa. Miał on przybyć na zebranie Towarzystw w Cambridge, Massachusetts, także zresztą i po to, by przeprowadzi rozmowy z Saundersem MacLane'm o wspólnej ich pracy prostujące pewne błędy wcześniejszej pracy F. K. Schmidta o generowaniu nieroz dzielczych rozszerzeń ciał o charakterystyce pierwszej.

Rozwijała się i rozwiązywała zagadnienia topologia algebraiczna ale nie-topolodzy odnosili się do niej bardzo sceptycznie. W Harvar po znakomitym odczycie Tuckera (a może Steenroda) o kompleksac komórkowych i ich homologiach usłyszano, jak się wyraził pewien zna komity słuchacz, że przedmiot ten osiągnął taki stopień komplikacj iż dalej pójść nie podobna. Książki traktujące o topologii były rzadki Był Hausdorff ze swoją *Mengenlehre* i topologia Kerékjártó, ale już *Ana lysis Situs* Veblena cierpiała na niedostatek geometrycznej poglądowośc zaś w *Topology* Lefschetza brak było algebraicznej precyzji. Pojawił s znakomity podręcznik Seiferta i Threlfalla, a pierwszy z trzech projekt wanych tomów Aleksandrowa–Hopfa skodyfikował już na stałe (pomij jąc modyfikacje, jakie wniósł Bourbaki i współcześni topolodzy kateg ryjni) topologię mnogościową. W owym tomie pierwszym były tylko gru

* Przekład artykułu *The work of Samuel Eilenberg in topology*, który ukazał s

homologii, grupy kohomologii dopiero co bowiem zostały ujawnione. W istocie, w czasie konferencji w Moskwie w 1935 r. trzej jej uczestnicy podali niezależnie od siebie wzory Alexandera–Whitneya na „cup product" kołańcuchów. Hopf opisał odwzorowania istotne S^{n+1} na S^n, Hurewicz dowiódł, że wyższe grupy homotopii mają znaczenie, a Whitney pokazał, że twierdzenie klasyfikacyjne Hopfa (dla odwzorowań n-wymiarowego kompleksu w n-wymiarową sferę) lepiej się formułuje przy użyciu grup kohomologii. W Polsce Kuratowski przewodził pełnej wigoru szkole, z wartościowymi wynikami pochodzącymi od jego uczniów: Borsuka o retraktach i Eilenberga o topologii płaszczyzny. W Stanach Zjednoczonych topolodzy mnogościowi rywalizowali z kombinatorycznymi. Topologia była w ruchu.

W tym ruchu 25 kwietnia 1939 r. był datą znaczącą: tego dnia przybył do Stanów Sammy. Jeszcze nie we własnej osobie (to nastąpiło dwa dni później, po krótkim pobycie w Anglii dla widzenia Henry Whiteheada), ale tego właśnie dnia przysłał on pierwszą swoją pracę do *Annals of Mathematics*. Praca ta, *Cohomology and continuous mappings*, była naturalną kontynuacją wcześniejszego dzieła Eilenberga (*Fundamenta*, 1938), gdzie po raz pierwszy użył on kołańcuchów o współczynnikach w grupie homotopii. W istocie praca w *Annals* zawierała staranne sformułowanie szczególnego przypadku teorii przeszkód.

Lepiej znana jest jego późniejsza praca *Extension and classification of continuous mappings*, przedstawiona w czasie Konferencji Topologicznej na Uniwersytecie w Michigan. W tej pracy Sammy sformułował explicite, w jasnej i łatwej do stosowania postaci, wszystkie istotne własności przeszkód dla rozszerzania przekształceń ciągłych, przez co ustalił mgliste do tego czasu, choć „wiszące w powietrzu" idee. Od tej pory sformułowania te nabrały cech standardu dla całej teorii przeszkód we wszelkich jej zastosowaniach, włączając w to nawet ostatnie przeszkody Walla dla chirurgii.

Ta ostatnia praca jest dobrym przykładem wpływu i stylu Sammy'ego. Ten sam styl ma także praca *Singular homology* z 1944 r. Wydobył w niej (z drukowanych tu i tam mętnych dyskusji o zorientowanych sympleksach i zmianach znaku) jasną i prostą definicję kompleksu syngularnego, którą do dziś się posługujemy.

Praca z 1940 r. o przeszkodach była początkiem dłuższej na tym polu działalności samego Sammy'ego. Funktor Ext, klasy kohomologii grup, k-niezmienniki przestrzeni (i wieź Postnikowa) — wszystko to są przykłady przeszkód, podczas gdy przestrzeń Eilenberga–MacLane'a jest jedną z przestrzeni, w której przeszkody te żyją. Sammy zarówno wyjaśnił, czym są przeszkody, jak i ustalił ich naturę oraz stosowalność.

Grupa aktywnych matematyków była wówczas mała i Sammy wkr
wszystkich znał. Szczerej zachęty i poparcia udzielił mu (jak innym
dym) Solomon Lefschetz ([1]), a także Ray Wilder, przy którym, na Uni
sytecie w Michigan, Sammy objął pierwszą posadę. Szybko ujawnił nadz
[illegible]ny talent do współpracy, o czym świadczą wspólne jego prace z E.
Millerem, O. G. Harroldem, R. L. Wilderem, D. Montgomerym i inn

S. Eilenberg w latach osiemdziesiątych

oraz późniejsza współpraca z T. Ganeą, H. Cartanem i J. Moorem. Z ty
ostatnim napisał piękną i podstawową pracę w 1965 r., w której pojaw
się pojęcie algebry dla monad (tam źle nazwane „triple"), idea, która z
minowała teorię kategorii na 5–6 lat. Na szczególną uwagę zasług
współpraca ze Steenrodem nad *Axiomatic approach to homology theo*

([1]) W oryginale cytowany jest wiersz:

Here's to Lefschetz, Solomon L.
Irrepressible as hell.
When he's at last beneath the sod
He'll then begin to heckle God

co doprowadziło do książki *Foundations of algebraic topology*. Książka ta (mimo, że jej tom drugi nigdy się nie ukazał) skutecznie zapełniła lukę spowodowaną brakiem dobrego podręcznika z topologii. Sammy zresztą tak doskonale sławił jej uroki, że już pierwotna jej wersja wywierała ogromny wpływ jeszcze na długo przed ukazaniem się książki w druku.

Skoro mowa o współpracy, pragnę zdać teraz relację z narodzin Eilenberga–MacLane'a. W okresie 1938–1941 pracowałem wraz z nieżyjącym już O. F. C. Schillingiem nad algebrami z dzieleniem nad lokalnymi ciałami i opisem tych algebr za pomocą zbiorów ilorazowych (2-wymiarowe kocykle grupy). W czasie tej pracy nad nieabelową teorią klas ciał wyraźnie odczuwaliśmy, Schilling i ja, brak jakichkolwiek 3-wymiarowych kocyklów. Użycie 2-wymiarowych zbiorów ilorazowych doprowadziło mnie do rozpatrzenia równolegle zbiorów ilorazowych do opisu rozszerzeń grup. Badałem te rozszerzenia intensywnie, szczególnie grup abelowych, i miałem o tym godzinny odczyt na zebraniu Towarzystwa w Nowym Orleanie. Potem, na wiosnę 1941 r., T. H. Hildebrandt zaprosił mnie do wygłoszenia sześciu wykładów na Uniwersytecie Michigan. Mówiłem o rozszerzeniach grup. Sammy słuchał uważnie, ale że musiał wyjechać po moim piątym wykładzie, poprosił o prywatne streszczenie szóstego. Uczyniłem to. Przygotowałem na ten odczyt ważny, jak mi się wydawało, przykład grupy rozszerzeń grupy abelowej (w dzisiejszej notacji była to grupa Ext (G, H), gdzie G jest grupą addytywną p-adycznych liczb całkowitych).

Kiedy pokazałem Sammy'emu te rachunki, ten zauważył, że niemal takie same problemy pojawiły się w ostatniej pracy Steenroda *Regular cycles of compact metric spaces*. Sammy sugerował, że moje metody mogą się przydać do rozstrzygnięcia pewnego problemu Steenroda dotyczącego p-adycznego solenoidu. W pierwszej chwili nie wiedziałem jak to zrobić, ale po całonocnej pracy doszedłem do tego i wydało mi się, iż oprócz faktu, że solenoid p-adyczny jest dualny względem p-adycznych liczb całkowitych, muszą stąd płynąć także inne konsekwencje. Do dna tego zadziwiającego związku między algebrą a topologią zdecydowaliśmy dojść już razem. Zajęło to nam czternaście lat 1941–1955 i przyniosło 15 prac, nie licząc anonsów. Traktowaliśmy te prace jak kompozycje muzyczne, numerując je po kolei od Opus I aż po Opus XV. Sammy zwykł był często żartować, że czternaście z nich ciągle jeszcze żyje — wtedy, a może jeszcze i teraz.

W Opusie I, *Group extensions and cohomology*, rozwiązaliśmy problem Steenroda i sformułowaliśmy twierdzenie o uniwersalnych współczynnikach dla kohomologii. W tym twierdzeniu musieliśmy użyć Ext (A, B) dla grup abelowych, obliczając ten Ext za pomocą rezolwenty wolnej grupy A. Ponieważ była to rezolwenta „krótka", nie rozeznaliśmy się w tym nale-

Bardzo wiele pytań otwierało się w innym kierunku. Twie[...] o uniwersalnych współczynnikach dla kohomologii Čecha, któr[...] zajmowaliśmy, wymagało operowania granicami systemów odwr[...] grup. Dla skonstruowania izomorfizmu między takimi granicami pot[...] były przekształcenia między dwoma systemami odwrotnymi. Co [...] zdawaliśmy sobie sprawę, że twierdzenie o uniwersalnych współczyn[...] dla kompleksów jest „naturalne" i chcieliśmy z tego zrobić praw[...] twierdzenie, a nie pozostać przy płaskim banale. Dla obu tych [...] musieliśmy odkryć pojęcie odwzorowania naturalnego, co zmusiło [...] zwrócenia się w stronę funktorów, te zaś z kolei skierowały naszą [...] na kategorie. A to już były bardzo ogólne pojęcia. Praca, która [...] wynikła, stanowiła Opus II: *General theory of natural equivalences*, [...] actions AMS, 1945.

Przez wiele lat, aż gdzieś po rok 1958, była to jedyna praca [...] dziedzinie i po dziś dzień stanowi dobre do niej wprowadzenie. Co [...] Sammy odgrywał jakąś rolę na niemal każdym szczeblu rozwoju [...] kategorii.

Kategorie abelowe pojawiły się po raz pierwszy w 1950 r. w mojej [...] *Duality for groups*. Wyrosła ona z dyskusji z Sammym i mego prag[...] przejścia z aksjomatyczną teorią homologii Eilenberga–Steenroda o[...] tości w grupach abelowych do obiektów ogólniejszej kategorii abe[...] Następny krok w stronę kategorii abelowych zrobili niezależnie A[...] thendieck w Kansas i D. Buchsbaum w Columbia University w [...] doktorskiej zaproponowanej przez Eilenberga.

Funktory sprzężone. Decydującą pracę napisał, pod wpływem [...] berga, Dan Kan (1958). Bogatszy o tę ideę przedmiot wymagał już k[...] Pisanie pierwszych książek, *Abelian categories* Petera Freyda i [...] *of categories* Barry'ego Mitchella, zaczęło się w Columbia, kiedy [...] autorzy byli z Sammym.

Teorie algebraiczne i inne istotne fragmenty pracy doktorskiej [...] vere'a z 1963 r. stanowią punkt zwrotny w teorii kategorii. Bardzo w[...] wy na punkcie swej niezależności, Lawvere był jednak uczniem Samm[...]

Monady (*triples*), następny ważny kierunek, zostały zapoczątk[...] przez wspólną pracę Eilenberga i Moore'a.

Kategorie zamknięte i związane z nimi idee odnoszące się do kat[...] nad kategoriami zamkniętymi zostały (trochę zbyt obszernie) uję[...] wspólnej pracy Eilenberga i Kelly'ego, 1966.

Elementarne toposy stanowią kolejny (i ostatni, jak do tej pory) krok naprzód. Sammy nie miał już na to bezpośredniego wpływ[...] w USA głównymi autorami byli dwaj jego dawni studenci: La[...] i Tierney.

co doprowadziło do książki *Foundations of algebraic topology*. Książka ta (mimo, że jej tom drugi nigdy się nie ukazał) skutecznie zapełniła lukę spowodowaną brakiem dobrego podręcznika z topologii. Sammy zresztą tak doskonale sławił jej uroki, że już pierwotna jej wersja wywierała ogromny wpływ jeszcze na długo przed ukazaniem się książki w druku.

Skoro mowa o współpracy, pragnę zdać teraz relację z narodzin Eilenberga–MacLane'a. W okresie 1938–1941 pracowałem wraz z nieżyjącym już O. F. C. Schillingiem nad algebrami z dzieleniem nad lokalnymi ciałami i opisem tych algebr za pomocą zbiorów ilorazowych (2-wymiarowe kocykle grupy). W czasie tej pracy nad nieabelową teorią klas ciał wyraźnie odczuwaliśmy, Schilling i ja, brak jakichkolwiek 3-wymiarowych kocyklów. Użycie 2-wymiarowych zbiorów ilorazowych doprowadziło mnie do rozpatrzenia równolegle zbiorów ilorazowych do opisu rozszerzeń grup. Badałem te rozszerzenia intensywnie, szczególnie grup abelowych, i miałem o tym godzinny odczyt na zebraniu Towarzystwa w Nowym Orleanie. Potem, na wiosnę 1941 r., T. H. Hildebrandt zaprosił mnie do wygłoszenia sześciu wykładów na Uniwersytecie Michigan. Mówiłem o rozszerzeniach grup. Sammy słuchał uważnie, ale że musiał wyjechać po moim piątym wykładzie, poprosił o prywatne streszczenie szóstego. Uczyniłem to. Przygotowałem na ten odczyt ważny, jak mi się wydawało, przykład grupy rozszerzeń grupy abelowej (w dzisiejszej notacji była to grupa Ext (G, H), gdzie G jest grupą addytywną p-adycznych liczb całkowitych).

Kiedy pokazałem Sammy'emu te rachunki, ten zauważył, że niemal takie same problemy pojawiły się w ostatniej pracy Steenroda *Regular cycles of compact metric spaces*. Sammy sugerował, że moje metody mogą się przydać do rozstrzygnięcia pewnego problemu Steenroda dotyczącego p-adycznego solenoidu. W pierwszej chwili nie wiedziałem jak to zrobić, ale po całonocnej pracy doszedłem do tego i wydało mi się, iż oprócz faktu, że solenoid p-adyczny jest dualny względem p-adycznych liczb całkowitych, muszą stąd płynąć także inne konsekwencje. Do dna tego zadziwiającego związku między algebrą a topologią zdecydowaliśmy dojść już razem. Zajęło to nam czternaście lat 1941–1955 i przyniosło 15 prac, nie licząc anonsów. Traktowaliśmy te prace jak kompozycje muzyczne, numerując je po kolei od Opus I aż po Opus XV. Sammy zwykł był często żartować, że czternaście z nich ciągle jeszcze żyje — wtedy, a może jeszcze i teraz.

W Opusie I, *Group extensions and cohomology*, rozwiązaliśmy problem Steenroda i sformułowaliśmy twierdzenie o uniwersalnych współczynnikach dla kohomologii. W tym twierdzeniu musieliśmy użyć Ext (A, B) dla grup abelowych, obliczając ten Ext za pomocą rezolwenty wolnej grupy A. Ponieważ była to rezolwenta „krótka", nie rozeznaliśmy się w tym należycie i nie użyliśmy modułów, nie mówiąc o modułach projektywnych, umieściliśmy natomiast staranny dowód faktu, że $\mathrm{Ext}^2(A, B)$ znika.

Bardzo wiele pytań otwierało się w innym kierunku. Twierdzenie o uniwersalnych współczynnikach dla kohomologii Čecha, którym się zajmowaliśmy, wymagało operowania granicami systemów odwrotnych grup. Dla skonstruowania izomorfizmu między takimi granicami potrzebne były przekształcenia między dwoma systemami odwrotnymi. Co więcej, zdawaliśmy sobie sprawę, że twierdzenie o uniwersalnych współczynnikach dla kompleksów jest „naturalne" i chcieliśmy z tego zrobić prawdziwe twierdzenie, a nie pozostać przy płaskim banale. Dla obu tych rzeczy musieliśmy odkryć pojęcie odwzorowania naturalnego, co zmusiło nas do zwrócenia się w stronę funktorów, te zaś z kolei skierowały naszą uwagę na kategorie. A to już były bardzo ogólne pojęcia. Praca, która z tego wynikła, stanowiła Opus II: *General theory of natural equivalences*, Transactions AMS, 1945.

Przez wiele lat, aż gdzieś po rok 1958, była to jedyna praca w tej dziedzinie i po dziś dzień stanowi dobre do niej wprowadzenie. Co więcej, Sammy odgrywał jakąś rolę na niemal każdym szczeblu rozwoju teorii kategorii.

Kategorie abelowe pojawiły się po raz pierwszy w 1950 r. w mojej pracy *Duality for groups*. Wyrosła ona z dyskusji z Sammym i mego pragnienia przejścia z aksjomatyczną teorią homologii Eilenberga–Steenroda od wartości w grupach abelowych do obiektów ogólniejszej kategorii abelowej. Następny krok w stronę kategorii abelowych zrobili niezależnie A. Grothendieck w Kansas i D. Buchsbaum w Columbia University w pracy doktorskiej zaproponowanej przez Eilenberga.

Funktory sprzężone. Decydującą pracę napisał, pod wpływem Eilenberga, Dan Kan (1958). Bogatszy o tę ideę przedmiot wymagał już książki. Pisanie pierwszych książek, *Abelian categories* Petera Freyda i *Theory of categories* Barry'ego Mitchella, zaczęło się w Columbia, kiedy obaj autorzy byli z Sammym.

Teorie algebraiczne i inne istotne fragmenty pracy doktorskiej Lawvere'a z 1963 r. stanowią punkt zwrotny w teorii kategorii. Bardzo wrażliwy na punkcie swej niezależności, Lawvere był jednak uczniem Sammy'ego.

Monady (*triples*), następny ważny kierunek, zostały zapoczątkowane przez wspólną pracę Eilenberga i Moore'a.

Kategorie zamknięte i związane z nimi idee odnoszące się do kategorii nad kategoriami zamkniętymi zostały (trochę zbyt obszernie) ujęte we wspólnej pracy Eilenberga i Kelly'ego, 1966.

Elementarne toposy stanowią kolejny (i ostatni, jak do tej pory) duży krok naprzód. Sammy nie miał już na to bezpośredniego wpływu, ale w USA głównymi autorami byli dwaj jego dawni studenci: Lawvere i Tierney.

Tak więc w chwili, kiedy nasz jubilat zabiera się do odczytu o użyciu i nadużyciu teorii kategorii, musimy uznawać świętą rękę Eilenberga...

Wracam do działalności firmy Eilenberg–MacLane. Kolejnego bodźca dostarczyła piękna praca H. Hopfa *Fundamentalgruppe und zweite Bettische Gruppe*, w której zostało pokazane, że pewna część drugiej grupy homologii przestrzeni zależy (funktorialnie) od grupy podstawowej. Hopf nie sformułował algebraicznej postaci tej zależności, pobieżne już jednak zbadanie jego wyników przekonało nas, że ten rodzaj zależności powinniśmy znać, wobec czego zabraliśmy się do roboty. Mieliśmy rację, nasza technika dawała się tu bowiem stosować. Doprowadziło nas to do głównego twierdzenia Opusu III, na mocy którego, jeśli tylko przestrzeń X jest asferyczna, to grupy kohomologii $H^q(X, G)$ są dokładnie grupami kohomologii grupy podstawowej $\pi_1(X)$. Co więcej, dla sformułowania tego twierdzenia musieliśmy podać pierwsze pełne określenie kohomologii w grupach. W swoich odczytach na obecnym sympozjum, H. Cartan omawiał niektóre konsekwencje odkrycia kohomologii w grupach, m.in. skutki dla algebry homologicznej i opis kohomologii w innych rodzajach systemów algebraicznych. W swoim czasie byliśmy wyraźnie świadomi związku także z algebraiczną teorią liczb i teorią klas ciał, a nawet zaczęliśmy nad tym robotę w Opusie VII, *Cohomology and Galois theory*, ale nie poprowadziliśmy jej dalej. Życie matematyczne obfituje w wybory. Wiedzieliśmy, że w tym kierunku można iść daleko i chociaż Emil Artin namawiał nas (około 1946 r.) na kontynuację — nie poszliśmy. Matematyka ma wiele rozgałęzień, niejedno z nich jest obiecujące, a kontynuacja wymaga wielu aktywnych ludzi (w tym wypadku byli to Hochschild i Tate).

Właściwe teraz chyba miejsce dla odnotowania wielkiego długu wdzięczności firmy Eilenberg–MacLane wobec Narodowej Rady Badań Obronnych. W lipcu 1944 r. świat był pogrążony w działaniach, które groziły zdławieniem lub odłożeniem wszelkiej myśli o kategoriach, przestrzeniach asferycznych, grupach kohomologii czy jakiejkolwiek kombinacji tych pojęć. Z braku czegoś lepszego MacLane znalazł się w Nowym Jorku na stanowisku kierownika Grupy Zastosowań Matematyki przy uniwersytecie Columbia z zadaniem zatrudnienia wielu nowych mózgów matematycznych dla podjęcia badań na potrzeby wojny. Jednym z pierwszych jego kroków było zatrudnienie Samuela Eilenberga, a także Irvinga Kaplansky'ego, George'a Mackeya, Donalda Linga i wielu innych. W dzień wszyscy ciężko pracowaliśmy nad kontrolą ognia z powietrza, po czym Sammy i ja szliśmy na obiad i wieczorami podejmowaliśmy pracę nad kategoriami oraz/lub kohomologiami. Nie jestem pewnien, czy nasza praca nad kontrolą ognia przyniosla (mimo naszego poświęcenia) jakikolwiek pozytywny rezultat; badania wojenne nastręczają rozliczne trudności, biurokratyczne i rzeczywiste, opisane w moim końcowym raporcie z działalności Grupy Zastosowań Matematyki. Ów raport, a zwłaszcza

jest już odtajniony, ale mało interesujący. Szczęśliwie takie ograniczenia nie odnosiły się do matematyki, a co zostało zrobione w zakresie kategorii i kohomologii — niech świat osądzi. W szczególności zaś fakt, że w warunkach utrudnionej komunikacji czasu wojennego kohomologie w grupach zostały odkryte niezależnie przez Beno Eckmanna, a homologie w grupach niezależnie przez Hopfa i Freudenthala.

Wracam do działalności firmy. Opus IV zapoczątkowało kolejny duży program: badanie przestrzeni $K(\pi, n)$ Eilenberga–MacLane'a, tj. tych przestrzeni (CW-kompleksów), których jedyną grupą homotopii jest grupa abelowa π w wymiarze n. Wobec wcześniejszego twierdzenia, wiążącego przestrzenie asferyczne (przestrzenie $K(\pi, 1)$) z kohomologiami grup, uważaliśmy przestrzenie $K(\pi, n)$ za całkowicie tu naturalne, a Hurewicz już wówczas dowiódł, że kohomologie takich przestrzeni zależą tylko od π i n, a więc tak jak dla $n = 1$. Z wyjątkiem przestrzeni rzutowych mało jest jednak naturalnych przykładów takich przestrzeni. Jak doskonale pamiętam, obecny na moim pierwszym o nich odczycie na seminarium w Harvard (około 1946 r.) Hurewicz wyraził sceptycyzm co do ich prawdziwego istnienia. Dla nas było jednak oczywiste, że te przestrzenie Eilenberga–MacLane'a mogą być składowymi klockami przy budowie bardziej ogólnych przestrzeni. Idea ta pojawiła się wyraźnie w Opusie VIII (i w Opusie IX), gdzie zdefiniowaliśmy pierwszy k-niezmiennik przestrzeni (o dwóch grupach homotopii) i gdzie pokazaliśmy, że w zasadzie kohomologie takiej przestrzeni są funkcjami obu tych grup homotopii i k-niezmiennika. Dowód opierał się na interpretacji Eilenberga (opisanej w jego pracy o homologiach syngularnych) konstrukcji minimalnego podkompleksu kompleksu syngularnego przestrzeni.

W 1947 r. znaleźliśmy także przykład przestrzeni z tymi samymi π_1 i π_2, gdzie zmiana k-niezmiennika pociągała zmianę typu homotopii przestrzeni. W tymże 1947 r. zarówno Eilenberg jak i (niezależnie) Zilber doszli do tego, co dziś nazywa się systemem Postnikowa przestrzeni. W istocie idea takiego systemu („wieży") jest bezpośrednim uogólnieniem pochodzącego od Eilenberga–MacLane'a pojęcia k-niezmiennika, chociaż w owym czasie, tj. w 1947 r., wyrażenie tego pojęcia w jego pełnej ogólności musiałoby być bardzo skomplikowane.

W Opusach X i XII firma Eilenberg–MacLane zwróciła uwagę na następujący problem: skoro homologie i kohomologie przestrzeni $K(\pi, n)$ zależą (algebraicznie) od π i n, i skoro dla $n = 1$ zależność ta wyraża się przez homologie i kohomologie grupy π — trzeba znaleźć ogólną formułę tej zależności dla wszelkich n. Z rozmów z Georgem Whiteheadem wiedzieliśmy także, że lepsza znajomość homologii przestrzeni $K(\pi, n)$ może ale kosztowało nas 7 lat i całe góry rachunków, starannie numerowanych w wielu indeksowanych seriach kartek, zebrany starannie w licznych zeszytach. Żałuję tylko, że nie trzymałem dłużej tego stosu papierów w moim gabinecie jako przykładu dla młodych. Nigdy przedtem ani nigdy potem nie pracowałem tak ciężko i wytrwale nad jednym problemem. I tylko raz musiałem przebrnąć przez taką masę papieru, a było to niedawno w związku z recenzją dla Narodowej Akademii Nauk kontrowersyjnego raportu o skutkach działania herbicydów w Wietnamie.

Naszą analizę kompleksu $K(\pi, n)$ zaczynaliśmy od dokładnego jego opisu, ale był to opis niezdarny, jak to łatwo może zobaczyć każdy, kto porówna nasze formuły z Opusów III i IX z jakimkolwiek współczesnym sformułowaniem, w którym komórki $K(\pi, n)$ są n-wymiarowymi kocyklami na Δ^q. Zobaczyć też można, że nasz opis $K(\pi, n)$ był nie tylko niezdarny, ale i niepotrzebnie duży: dla małych n i małego wymiaru można ten model $K(\pi, n)$ zamienić na znacznie prostsze kompleksy łańcuchowe zależne od π i n. Robiliśmy takie zamiany, przypadek po przypadku, dokonując licznych porównań za pomocą równoważności łańcuchowych i próbując uzyskać geometryczne lub symplicjalne przedstawienia, które jednak nigdy nie trafiały w samo sedno. Stopniowo okazywało się, że $K(\pi, n)$ dla π abelowych miał produkt, produkt tasowany (*shuffle product*), i że $K(\pi, 2)$ mógł być opisany w terminach $K(\pi, 1)$ i produktu tasowanego komórek, który zapisywaliśmy w postaci $[\sigma_1|\ldots|\sigma_k]$, gdzie różne σ_i, oddzielone tu kreskami, są komórkami pochodzącymi z naszego dobrze znanego kompleksu $K(\pi, 1)$ i gdzie brzeg jest dany w terminach produktu tasowanego i $K(\pi, 1)$. Mając zaś tę notację pod dobrą kontrolą rachunkową, naturalnie nazwaliśmy ten proces — przejście od $K(\pi, 1)$ do równoważnego $K(\pi, 2)$ czy od $K(\pi, 2)$ do $K(\pi, 3)$ — konstrukcją „kreskową". A kiedy sprawa dojrzała, udowodniliśmy (w Opusie XII), że $K(\pi, n)$ jest łańcuchowo równoważny kompleksowi powstającemu przez zastosowanie n konstrukcji kreskowych do całkowitego pierścienia grupowego grupy π:

$$K(\pi, n) \simeq B^n Z(\pi).$$

I dopiero wtedy zobaczyliśmy, że nasz symbol „kreska" był w istocie produktem tensorowym, zaś produkty tasowane przekształcały każdy $K(\pi, n)$ w to, co dziś nazywamy pierścieniem różniczkowym z gradacją. Ale nawet i bez tego, a jedynie z podstawowym wynikiem w ręku, byliśmy w stanie iść dalej dla pewnych grup homologii $K(\pi, n)$ i otrzymać formuły niezmiennicze w zamkniętej postaci. Na przykład, $H_4(\pi, 2)$ jest uniwersalnym funktorem drugiego stopnia $\Gamma(\pi)$ grupy π.

$H_{n+k}(\pi, n)$ jest drugiego stopnia względem π, a na dalszych — trzeciego, czwartego itd., zgodnie z pojęciami funktorów wyższych stopni wprowadzonymi w Opusie XIII. Niektóre z tych funktorów były jednak trudne do liczenia używanymi przez nas metodami: krytyczny dla tych metod był przypadek $H_7(\pi, 2)$. Jak stwierdzono w Opusie XIII, wymagałoby to pełnego użycia formuły Künnetha i z tego powodu nie zostało w tej pracy wykonane.

Wkrótce po Opusie XIII działało mistrzowskie seminarium Cartana (1954–1955) o homotopiach i przestrzeniach Eilenberga-MacLane'a. Seminarium to silniej oparło się na pojęciowych własnościach konstrukcji kreskowej i doprowadziło do całkowitego wyliczenia homologii przestrzeni Eilenberga-MacLane'a ze współczynnikami całkowitymi modulo p. Co więcej, seminarium Cartana dostarczyło sposobu opisania homologii o współczynnikach całkowitych. W opisie były wykorzystane operacje homologiczne w zakresie współczynników modulo p, konstruowało się z nich bowiem produkt tensorowy pewnej liczby kompleksów elementarnych, po jednym dla każdej właściwej operacji homologicznej. Homologia takiego produktu tensorowego, po redukcji przez pewne relacje, dawała szukaną całkowitą homologię przestrzeni Eilenberga-MacLane'a. Pozwalało to na przeprowadzanie rachunków, ale formuła nie była całkiem funktorialnie niezmiennicza w sensie naszego wcześniejszego Opusu XIII.

Dzisiaj — stwierdzam to z pełnym zadowoleniem — sprawy te poszły dalej i dysponujemy już wszystkimi formułami homologicznymi dla $H_*(\pi, n)$. Ross Hamsher rozważał w swojej rozprawie homologie przestrzeni $K(\pi, 1)$ Eilenberga-MacLane'a dla π abelowych i podał kompletne formuły niezmiennicze dla homologii takiej przestrzeni. Następnym krokiem była rozprawa Geralda J. Deckera, Chicago 1974, w której otrzymał on w zasadzie niezmiennicze formuły funktorialne dla wszystkich grup homologii przestrzeni Eilenberga-MacLane'a, nie wyłączając krytycznej grupy $H_7(\pi, 2)$. Stało się to dzięki połączeniu wyników seminarium Cartana z lat 1954–1955 z nową wersją formuły Künnetha. Ta nowa wersja stosuje się do specjalnej klasy kompleksów, tych mianowicie, w których odwzorowanie Bocksteina ma lewą odwrotność. Dla takich kompleksów zwyczajną formułę Künnetha

$$0 \to \sum_{p+q=n} H_p(K) \otimes H_q(L) \to H_n(K \otimes L) \to \sum_{p+q=n-1} \operatorname{Tor}(H_p(K), H_q(L)) \to 0,$$

w której ciąg dokładny rozszczepia się, ale nie rozszczepia się naturalnie, można zastąpić przez jedną formułę zamkniętą. Ta zamknięta formuła stosuje się następnie do produktów tensorowych kompleksów elemen-

Wielka to przyjemność uhonorować sześćdziesiąte urodziny Eilenberga informacją, że jeden z ważnych problemów teorii został rozstrzygnięty. Oczywiście pozostaje jeszcze wiele innych pytań, które nie zostały rozstrzygnięte. Na przykład, kontynuując te badania, chcielibyśmy mieć pełny opis kohomologii przestrzeni Eilenberga–MacLane'a w terminach odpowiednich niezmienniczych formuł. Opus XIII Eilenberga–MacLane'a zawiera pewne wyniki w tym kierunku, a rozprawa Deckera daje ich jeszcze więcej, ale ciągle jesteśmy dalecy od kompletnego opisu. Co więcej, przypadek przestrzeni Eilenberga–MacLane'a jest, jak zawsze, tylko pierwszym krokiem. Musi przecież istnieć jakiś sposób na zrozumienie, jak homologie i kohomologie wieży Postnikowa zależą od grup homotopii i k-niezmienników.

Inne stare pytanie dotyczy interpretacji wyższych grup homologii grupy. H^2 ma wyraźną interpretację poprzez rozszerzenia grupy, zaś H^3 ma interpretację przez przeszkody do istnienia rozszerzenia, jak to pokazaliśmy w naszym Opusie V, stanowiącym rozwinięcie wcześniejszej pracy Reinholda Baera. To Opus V miało duży wpływ, bo ten sam rodzaj interpretacji może być opracowany (i był opracowany) dla wielu innych rodzajów teorii kohomologicznych. Pozostaje wszakże pytanie, czy można znaleźć podobne wyjaśnienie dla wyższych grup kohomologii. Praca Eilenberga–MacLane'a o pętlach znalazła takie wyjaśnienie, ale nie było ono zbyt szczęśliwe. Najnowsze wyniki Johna Duskina dostarczają takich wyjaśnień za pomocą jego pojęcia π-torsora.

Generyczna acykliczność jest otwartym problemem, który nam nadal bardzo ciąży. Idea wyłoniła się z Opusu XV, w którym zauważyliśmy, że większość typowych teorii kohomologii była opisywana w terminach kompleksów łańcuchowych, które są bardzo bliskie acyklicznym: są „generycznie" acykliczne w ścisłym tam określonym sensie. Późniejsze konsekwencje tej uwagi otwierają wiele fascynujących i tajemniczych pytań. Miejmy nadzieję, że będziemy mogli zdać z nich sprawę na uroczystościach siedemdziesięciolecia urodzin.

Tłum. Roman Duda

Spis publikacji S. Eilenberga do roku 1972

Książki

[1] (z N. E. Steenrodem) *Foundations of Algebraic Topology*, Princeton N. J., 1952.
[2] (z H. Cartanem) *Homological Algebra*, Princeton N. J., 1956.

Prace

[1] *Remarques sur les ensembles et les fonctions relativement mesurables*, C. R. Soc. Sci. Varsovie, Chap. III, 25 (1932), str. 93–98.
[2] *Sur les transformations périodiques de la surface de sphère*, Fund. Math. 22 (1934), str. 28–41.
[3] *Sur les transformations continues d'espaces metriques compacts*, ibidem 22 (1934), str. 292–296.
[4] *Sur les décompositions des continus en ensembles connexes*, ibidem 22 (1934), str. 297–302.
[5] *Sur quelques propriétés des transformations localement homéomorphes*, ibidem 24 (1935), str. 35–42.
[6] *Sur le plongement des espaces dans les continus acycliques*, ibidem 24 (1935), str. 65–71.
[7] *Deux théorèmes sur l'homologie dans les espaces compacts*, ibidem 24 (1935), str. 151–155.
[8] *Remarque sur un théorème de M. W. Hurewicz*, ibidem 24 (1935), str. 156–159.
[9] *Sur les transformations d'espaces metriques en circonference*, ibidem 24 (1935), str. 160–176.
[10] *Sur l'invariance par rapoprt aux petites transformations*, C. R. Acad. Sci. Paris 200 (1935), str. 1003–1005.
[11] (z S. Saksem) *Sur la dérivation des fonctions dans les ensembles dénombrables*, Fund. Math. 25 (1935), str. 264–266.
[12] *Sur quelques propriétés topologiques de la surface de sphère*, ibidem 25 (1935), str. 267–272.
[13] *O zastosowaniach topologicznych odwzorowań na okrąg koła*, Wiadom. Mat. 41 (1935), str. 1–32.
[14] *Transformations continues en circonference et la topologie du plan*, Fund. Math. 26 (1936), str. 61–112.
[15] *Sur le théorème de decomposition de la théorie de la dimension*, ibidem 26 (1936), str. 146–149.
[16] (z K. Borsukiem) *Über stetige Abbildungen der Teilmengen euklidischer Räume auf die Kreislinie*, ibidem 26 (1936), str. 207–223.
[17] *Bemerkungen zur Pontrjagin'schen Verallgemeinerung des Alexander'schen Dualitätssatzes*, ibidem 26 (1936), str. 224–228.
[18] *Un théorème de dualités*, ibidem 26 (1936), str. 280–282.
[19] *Sur les espaces multicoherents I*, ibidem 27 (1936), str. 153–190.
[20] *Sur un théorème topologique de M. L. Schnirelmann*, Mat. Sb. 1 (1936), str. 557–560.
[21] *Über ein Problem von H. Hopf*, Fund. Math. 28 (1937), str. 58–60.
[22] *Sur les groupes compacts d'homeomorphies*, ibidem 28 (1937), str. 75–80.
[23] *Sur les courbes sans noeuds*, ibidem 28 (1937), str. 233–242.
[24] *Sur l'enlacement faible*, C. R. Acad. Sci. Paris 204 (1937), str. 1226–1227.
[25] *Sur les espaces multicoherents II*, Fund. Math. 29 (1937), str. 101–122.
[26] *Sur les ensembles plans localement connexes*, ibidem 29 (1937), str. 159–160.
[27] *Un théorème sur l'homotopie*, Ann. of Math. 38 (1937), str. 656–661.
[28] *Sur la multicoherence des surfaces closes*, C. R. Soc. Sci. Varsovie, Chap. III, 30 (1937), str. 109–111.
[29] *Sur les transformations à petites tranches*, Fund. Math. 30 (1938), str. 92–95.
[30] (z E. Otto) *Quelques propriétés characteristiques de la dimension*, ibidem 31 (1938), str. 149–15[illegible]

[32] *On φ-mesures*, Ann. Soc. Polon. Math. 17 (1938), str. 251–252.
[33] *On continua of finite length I*, ibidem 17 (1938), str. 253–254.
[34] *Cohomologies et transformations continues*, C. R. Acad. Sci. Paris 208 (1939), str. 68–69.
[35] *Généralisation du théorème de M. H. Hopf sur les classes des transformations en surfaces sphériques*, Compositio Math. 6 (1939), str. 428–433.
[36] *On the relation between the fundamental group of a space and the higher homotopy groups*, Fund. Math. 32 (1939), str. 167–175.
[37] (z K. Kuratowskim) *Théorèmes d'addition concernant le groupe des transformations en circonference*, ibidem 39 (1939), str. 193–200.
[38] *Cohomology and continuous mappings*, Ann. of Math. 41 (1940), str. 231–251.
[39] *On continuous mappings of manifolds into spheres*, ibidem 41 (1940), str. 662–673.
[40] *On a theorem of P. A. Smith concerning fixed points for periodic transformations*, Duke Math. J. 6 (1940), str. 428–437.
[41] *On homotopy groups*, Proc. Nat. Acad. Sci. 26 (1940), str. 563–565.
[42] *Ordered topological spaces*, Amer. J. Math. 63 (1941), str. 39–45.
[43] *An invariance theorem for subsets of S^n*, Bull. Amer. Math. Soc. 47 (1941), str. 73–75.
[44] *Continuous mappings of infinite polyhedra*, Ann. of Math. 42 (1941), str. 459–468.
[45] *On spherical cycles*, Bull. Amer. Math. Soc. 47 (1941), str. 432–434.
[46] *Extensions and classification of continuous mappings*, Lectures in Topology, Univ. of Michigan Press, Ann Arbor 1941, str. 57–99.
[47] (z S. MacLanem) *Infinite cycles and homologies*, Proc. Nat. Acad. Sci. 27 (1941), str. 535–539.
[48] (z E. W. Millerem) *Zero-dimensional families of sets*, Bull. Amer. Math. Soc. 47 (1941), str. 921–923.
[49] *Banach space methods in topology*, Ann. of Math. 43 (1942), str. 568–579.
[50] (z R. L. Wilderem) *Uniform local connectedness and contractibility*, Amer. J. Math. 64 (1942), str. 613–622.
[51] (z S. MacLanem) *Group extensions and homology*, Ann. of Math. 43 (1942), str. 757–831.
[52] (z S. MacLanem) *Appendix* w książce: *S. Lefschetz, Algebraic Topology*, Providence, Rh. I., 1942, str. 344–349.
[53] (z S. MacLanem) *Natural isomorphisms in group theory*, Proc. Nat. Acad. Sci. 28 (1942), str. 537–543.
[54] (z O. G. Harroldem) *Continua of finite linear mesure*, Amer. J. Math. 65 (1943), str. 137–146.
[55] (z S. MacLanem) *Relations between homology and homotopy groups*, Proc. Nat. Acad. Sci. 29 (1943), str. 155–158.
[56] (z I. Nivenem) *The „fundamental theorem of algebra" for quaternions*, Bull. Amer. Math. Soc. 50 (1944), str. 246–248.
[57] *Continua of finite linear mesure II*, Amer. J. Math. 66 (1944), str. 425–427.
[58] *Singular homology theory*, Ann. of Math. 45 (1944), str. 407–447.
[59] (z N. E. Steenrodem) *Axiomatic approach to homology theory*, Proc. Nat. Acad. Sci. 31 (1945), str. 117–120.
[60] (z S. MacLanem) *General theory of natural equivalences*, Trans. Amer. Math. Soc. 58 (1945), str. 231–294.
[61] (z S. MacLanem) *Relations between homology and homotopy groups of spaces*, Ann. of Math. 46 (1945), str. 480–509.

[63] (z S. MacLanem) *Determination of the second homology and cohomology groups of a space by means of homotopy invariants*, Proc. Nat. Acad. Sci. 32 (1946), str. 277–280.
[64] (z S. MacLanem) *Cohomology theory in abstract groups I*, Ann. of Math. 48 (1947), str. 51–78.
[65] (z S. MacLanem) *Cohomology theory in abstract groups II, Group extensions with a non-abelian kernel*, ibidem 48 (1947), str. 326–341.
[66] *Homology of spaces with operators I*, Trans. Amer. Math. Soc. 61 (1947), str. 378–417.
[67] (z S. MacLanem) *Algebraic cohomology groups and loops*, Duke Math. J. 14 (1947), str. 435–463.
[68] *On a linkage theorem by L. Cesari*, Bull. Amer. Math. Soc. 53 (1947), str. 1192–1195.
[69] *Singular homology in differentiable manifolds*, Ann. of Math. 48 (1947), str. 670–681.
[70] (z C. Chevalleyem) *Cohomology theory of Lie groups and Lie algebras*, Trans. Amer. Math. Soc. 63 (1948), str. 85–124.
[71] *Relations between cohomology groups in a complex*, Comment. Math. Helv. 21 (1948), str. 302–320.
[72] (z S. MacLanem) *Cohomology and Galois theory I, Normality of algebras and Teichmüller's cocycle*, Trans. Amer. Math. Soc. 64 (1948), str. 1–20.
[73] *Extensions of general algebras*, Ann. Soc. Polon. Math. 21 (1948), str. 125–134.
[74] (z S. MacLanem) *Homology of spaces with operators II*, Trans. Amer. Math. Soc. 65 (1949), str. 49–99.
[75] *Topological methods in abstract algebra, Cohomology theory of groups*, Bull. Amer. Math. Soc. 55 (1949), str. 3–37.
[76] *On the problems of topology*, Ann. of Math. 50 (1949), str. 247–260.
[77] (z J. A. Zilberem) *Semi-simlicial complexes and singular homology*, ibidem 51 (1950), str. 499–513.
[78] (z S. MacLanem) *Relations between homology and homotopy groups of spaces II*, ibidem 51 (1950), str. 514–533.
[79] (z S. MacLanem) *Cohomology theory of abelian groups and homotopy theory I*, Proc. Nat. Acad. Sci. 36 (1950), str. 443–447.
[80] (z S. MacLanem) *Cohomology theory of abelian groups and homotopy theory II*, Proc. Nat. Acad. Sci. 36 (1950), str. 657–663.
[81] (z S. MacLanem) *Cohomology theory of abelian groups and homotopy theory III*, ibidem 37 (1951), str. 307–310.
[82] (z S. MacLanem) *Homology theories for multiplicative systems*, Trans. Amer. Math. Soc. 71 (1951), str. 294–330.
[83] (z S. MacLanem) *Cohomology theory of abelian groups and homotopy theory IV*, Proc. Nat. Acad. Sci. 38 (1952), str. 325–329.
[84] *Homotopy groups and algebraic homology theories*, Proc. Intern. Congress 1950, str. 349–353.
[85] (z S. MacLanem) *Acyclic models*, Amer. J. Math. 75 (1953), str. 189–199.
[86] (z J. A. Zilberem) *On products of complexes*, ibidem 75 (1953), str. 200–204.
[87] (z S. MacLanem) *On the groups $H(\pi, n)$*, Ann. of Math. 58 (1953), str. 55–106.
[88] (z S. MacLanem) *On the groups $H(\pi, n)$, II*, ibidem 60 (1954), str. 49–139.
[89] (z S. MacLanem) *On the groups $H(\pi, n)$, III*, ibidem 60 (1954), str. 513–557.
[90] (z S. MacLanem) *On the homology theory of abelian groups*, Canad. J. Math. 7 (1955), str. 45–53.

[92] (z H. Ikedą i T. Nakayamą) *On the dimension of modules and algebras I*, Nagoya Math. J. 8 (1955), str. 49–57.
[93] (z T. Nakayamą) *On the dimension of modules and algebras II, Frobenius algebras and quasi-Frobenius rings*, ibidem 9 (1955), str. 1–16.
[94] (z H. Nagao i T. Nakayamą) *On the dimension of modules and algebras II, Dimension of residue rings of hereditary rings*, ibidem 10 (1956), str. 87–95.
[95] *Homological dimension and syzygies*, Ann. of Math. 64 (1956), str. 328–336; Errata ibidem 65 (1957), str. 593.
[96] (z T. Nakayamą) *On the dimension of modules and algebras V, Dimension of residue rings*, Nagoya Math. J. 11 (1957), str. 9–12.
[97] (z T. Ganeą) *On the Lusternik–Schnirelmann category of abstract groups*, Ann. of Math. 65 (1957), str. 517–518.
[98] (z A. Rosenbergiem i D. Zelinskym) *On the dimension of modules and algebras VIII, Dimension of tensor products*, Nagoya Math. J. 12 (1957), str. 71–93.
[99] (z H. Cartanem) *Foundations of fibre bundles*, Symp. Intern. Topologia Algebraica, Mexico 1958, str. 16–23.
[100] *Abstract description of some basic functors*, J. Indiana Math. Soc. 24 (1960), str. 231–234.
[101] (z J. C. Moorem) *Limits and spectral sequences*, Topology 1 (1962), str. 1–23.
[102] (z K. Kuratowskim) *A remark on duality*, Fund. Math. 50 (1962), str. 515–517.
[103] (z J. C. Moorem) *Foundations of relative homological algebra*, Memoirs Amer. Math. Soc. 55 (1965), str. 1–39.
[104] (z J. C. Moorem) *Adjoint functors and triples*, Illinois J. Math. 9 (1965), str. 381–398.
[105] (z J. C. Moorem) *Homology and fibrations I*, Comment. Math. Helv. 40 (1956), str. 199–236.
[106] (z J. C. Moorem) *Homological algebra and fibrations*, Colloq. Topologie, Bruxelles 1966, str. 81–90.
[107] (z G. M. Kellym) *A generalization of the functorial calculus*, J. Algebra 3 (1966), str. 366–375.
[108] (z G. M. Kellym) *Closed categories*, Proc. Conf. Categorical Algebra, La Jolla 1966, str. 421–562.
[109] (z J. B. Wrightem) *Automata in general algebra*, Information and Control 11 (1967), str. 452–470.
[110] (z C. C. Elgotem) *Iteration and recursion*, Proc. Nat. Acad. Sci. 61 (1968), str. 378–379.
[111] (z M. P. Schutzenbergerem) *Rational sets in commutative monoids*, J. Algebra 13 (1969), str. 173–191.
[112] (z C. C. Elgotem i J. C. Shepherdsonem) *Sets recognized by n-tape automata*, ibidem 13 (1969), str. 447–464.
[113] *Algebraic aspects of automata theory*, Actes Congrès Intern. Math. 3 (1970), str. 265–267.
[114] (z E. Dyerem) *An adjunction theorem for locally equiconnected spaces*, Pacific J. Math. 41 (1972), str. 669–685.